Полиноми са разломљеним степенима, SPICE модел и примена

Миона Андрејевић Стошовић, *Member, IEEE*, Марко Димитријевић, *Member, IEEE*,
Ванчо Литовски

***Апстракт*— Приказан је поступак моделовања нелинеарног контролисаног генератора који пред–ставља полином са разломљеним степеном са непар–ним имениоцем експонента. Модел је прилагођен SPICE нотацији. Предлажемо да се овакав полином користи као активациона функција вештачког неуро–на - перцептрона. Дајемо прелиминарне резултате симулације неурона са два улаза.**

***Кључне речи*—моделовање, полином са разломљеним сте-пеном, вештачки неурон.**

I. Увод

У досадашњој пракси коришћене су различите актива-ционе функције вештачког неурона односно перцептрона [1,2]. Међу њима најпознатије су одскочна, линеарна (користи се само у излазном слоју вишеслојних вештач-ких неуронских мрежа (ВНМ)), логистичка и звонаста (Гаусова) која се среће под називом Radial Basis (РБ). Док се прва од ових фунција користи само у случајевима који су везани за одлучивање (сепарацију), последње две се користе алтернативно зависно од предмета на коме се ВНМ примењује. Њихова одлика је да користе експонен-цијалне функције и тиме у извесној мери успоравају изра-чунавања. У специјалном случају када треба да се импле-ментирају у облику аналогног или дигиталног кола оне постављају озбиљне захтеве пред пројектантом кола. Слично, када треба да се имплементирају у SPICE симу-латору ове активационе функције намећу потребу за упо-требом функционалног, а не електричног описа [3].

Математика разломљеног реда је данас све више у упо-треби [4], а један од специјалних случајева су полиноми са разломљеним степенима [5]. Они се већ дуго користе при моделовању електронских компонената као што су, на пример, транзистори са ефектом поља (ФЕТ) [6]. Њима је могуће апроксимирати карактеристике које су конвек-сне на горе (ако је разломљени ред полинома мањи од јединице) или конвексне на доле (ако је разломљени ред полинома већи од јединице). Све у свему, употреба овак-вих полинома не само да омогућава већу флексибилност већ, у неким случајевима, је незаобилазна.

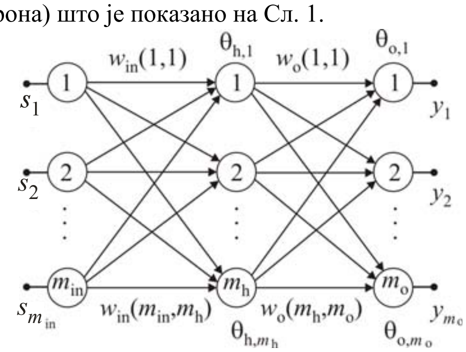
Миона Андрејевић Стошовић, Марко Димитријевић, Ванчо Литовски – Универзитет у Нишу, Електронски факултет, Александра Медведа 14, 18000 Ниш, Србија (e-mail:miona.andrejevic, marko.dimitrijevic, vanco.litovski@elfak.ni.ac.rs)

У овом раду по први пут биће уведена ова нова актива-циона функција и биће приказан SPICE модел перцептро-на чија је активациона функција типа $y=v^{k/n}$, где је n прост број и $k<|n|$. k је непаран цео број. Другим речима, биће приказано коло компатибилно са SPICE нотацијом које остварује контролисани генератор са поменутом функци-јом. Такав генератор биће побуђиван сигналом типа: $v=\theta+\sum_{i=1}^{m} w_i s_i$, где су s_i, i=1,2,...,m сигнали који побуђују перцептрон, w_i, i=1,2,...,m тежински коефицијенти (синап-се), θ је константа (праг), а m је број улазних сигнала.

На примерима различитих побудних сигнала биће демонстрирана својства нове активационе функције. SPICE модел биће верификован симулацијом перцептрона са два улазна сигнала.

II. Вештачка неуронска мрежа и перцептрон

ВНМ је посебна парадигма математичког алгоритма пресликавања више променљивих у више функција. Она се остварује као спрега појединих оператора (перцептрона или неурона) што је показано на Сл. 1.

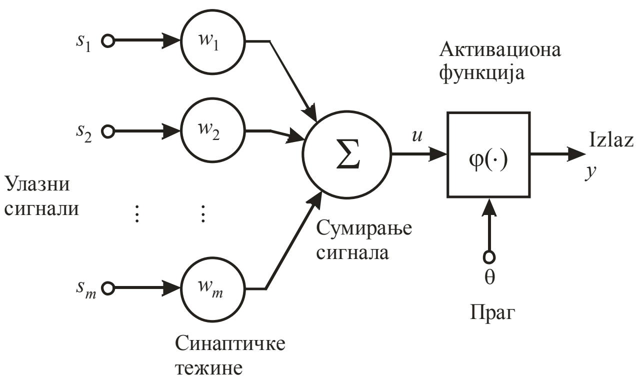


Слика 1. Потпуно повезана нерекурентна ВНМ са више улазних и више излаsних прикључака.

Кружићима на Сл. 1 приказани су оператори, а стрели-це означавају смер простирања сигнала односно смер у коме се обављају рачунске операције. Са w су обележене тзв. синаптичке тежине, а са θ прагови, о чему ће убрзо бити речи. Сваки кружић представља један неурон. Они су уређени у слојевима тако да Сл. 1 представља трослој-ну мрежу. Први слој (који се састоји од улазних неурона) обично не обавља рачунске радње већ само дистрибуира сигнале неуронима у следећем – скривеном - слоју. Скри-вени је најважнији слој са становишта рачунске моћи

ВНМ. Излазни слој обавља додатну обраду међу-сигнала и генерише излазне сигнале. Мрежа не мора да буде потпуно повезана што значи да неке од синаптичких тежина могу да буду једнаке нули. Неке мреже имају више скривених слојева.

Сам вештачки неурон има своју структуру која у основи подсећа на структуру природног неурона. Она је приказана на Сл. 2.



Слика 2. Структура вештачког неурона

Перцептрон обавља следећа израчунавања. Најпре се одреди активациони потенцијал:

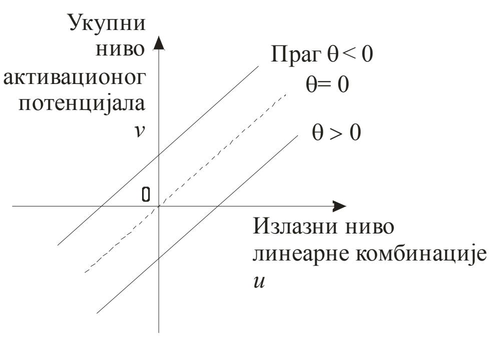
$$u = \sum_{i=1}^{m} w_i s_i \tag{1}$$

Затим се он редукује за вредност прага

$$v = u - \theta \tag{2}$$

да би се, најзад, добио излазни сигнал неурона тако што се обави пресликавање:

$$y = \varphi(u - \theta) = \varphi(v) \tag{3}$$



Слика 3. Линеарна активациона функција и улога прага

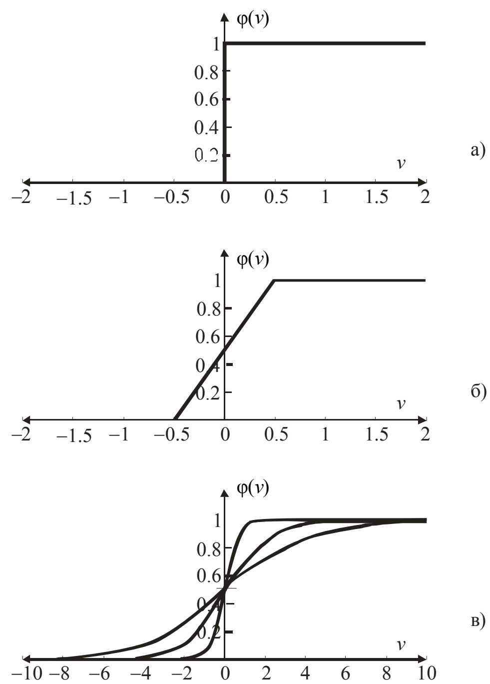
Оператор φ(·) назива се "активациона функција" и може да добија више облика. У даљем тексту размотрићемо оне који се најчешће користе.

Најпре, активациона функција може да буде линеарна. Оваква функција се обично користи само у излазном слоју. Она је приказана на Сл. 3 где је искоришћена прилика да се прикаже и улога прага у формирању аргумента активационе функције.

Одскочна активациона функција приказана је на Сл. 4а. За овај тип функције, који је приказан на Сл. 4а, важи

$$y = \varphi(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Овај модел је познат као *McCulloch-Pitts* модел [7].



Слика 4. Активационе функције: а) одскочна, б) сегментно линеарна и в) сигмоидна

Сегментно-линеарна активациона функција приказана је на Сл. 4б. Овде важи

$$y(v) = \varphi(v) = \begin{cases} 1, & v \geq \frac{1}{2} \\ v, & -\frac{1}{2} > v > -\frac{1}{2} \\ 0, & v \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{5}$$

На Сл. 4в приказана је сигмоидна активациона функција. Овај тип активације се најчешће користи у ВНМ. Она може бити реализована помоћу логистичке функције:

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + \exp(-a \cdot v)} \tag{6}$$

Овде је a нагиб сигмоидне функције. Променом a може се контролисати нагиб у веома широким границама (практично од нуле до бесконачности) што је приказано на Сл 4в. Нагиб у координатном почетку је једнак a/4. Такође, треба приметити да је сигмоидна активациона функција аналитичка што значи да је диференцијабилна на целој апсцисној оси са непрекидним изводима произвољног реда. Ово својство је веома важно са становишта примене алгоритама за одређивање коефицијената w і θ који користе Њутнове методе за оптимизацију.

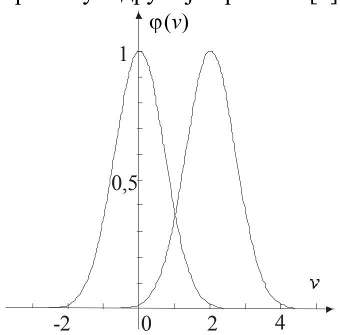
$$\varphi(v) = \tanh\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1-\exp(-a\cdot v)}{1+\exp(-a\cdot v)} \tag{7}$$

Предност ове функције је у томе што се одзив креће у интервалу (-1,1).

Најзад, у новије време веома се користи Гаусово језгро које је познато под називом РБФ (од Radial Basis Function):

$$\varphi(v) = A_0 \cdot \exp\left(-\alpha\left\| v\text{-}c \right\|^2\right) \tag{8}$$

где је са $\|\cdot\|$ обележено еуклидско растојање. На Сл. 5 приказане су две РБФ са различитим вредностима константе c. У употреби су и друга језгра РБФ [8].



Слика 5. Два РБФ језгра са Гаусовим обликом. Вредност α је иста за обе криве. Лева крива има c=0, а десна c=2. За обе криве је A_0=1.

Тиме смо исцрпли опис ВНМ. У овом раду се нећемо бавити поступцима за одређивање вектора **w** и **θ**, што се обично назива обуком ВНМ.

III. Примена полинома са разломљеним степенима у електроници

Једна посебна грана математике данас се бави операторима "разломљеног реда" [4]. При томе се мисли на изводе разломљеног реда, експоненте разломљеног реда и сл. За нас је овде од посебног интереса руковање са полиномима разломљеног реда [5]. Овде ћемо под полиномом разломљеног реда подразумевати израз

$$\varphi(v) = \sum_{\substack{k=1\\ \Delta k=2}}^{n-2}\left(a_k \cdot v^{k/n}\right) \tag{9}$$

где је n прост број и $k<|n|$. k је непаран цео број.

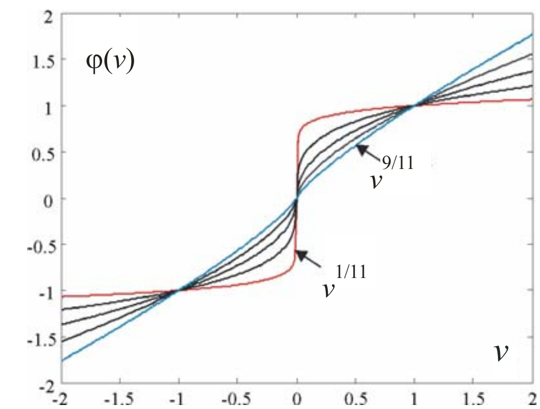
Ако се овакав полином користи као активациона функција настаје

$$y(v) = \varphi(v) = \sum_{\substack{k=1\\ \Delta k=2}}^{n-2}\left(a_k \cdot v^{k/n}\right) \tag{10}$$

У принципу, не постоје сметње да сумирање у (9) иде и са $k>n$. У таквом случају би одзив неурона могао брзо да расте и изнад јединице. Овде ћемо се, најпре, ограничити на (9) како би добили одзив неурона који је сличан сигмоидној функцији, а затим, једноставности ради, користићемо најпростији облик формуле (9) и то:

$$y = \varphi(v) = v^{k_0/n} \tag{11}$$

што значи да смо узели само један сабирак полинома и да је коефицијент полинома који се односи на тај сабирак једнак јединици. Тиме, међутим, не умањује се вредност ниједног од закључака који ће надаље бити понуђени.



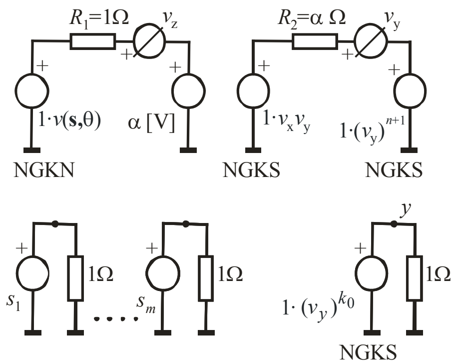
Слика 6. Ток функције (11) за n=11 и k=1,3,5,7 и 9 и једна сигмоидна функција

Ток функције (11) за n=11 и k=1,3,5,7 и 9, дат је на Сл. 6. Може се уочити суштинска разлика у вредности извода у координатном почетку у односу на сигмоидну функцију. Наиме, ни (9), а ни (11) нису диференцијабилне у координатном почетку. Имајући то у виду приликом употребе ових функција као активационих функција ВНМ неће моћи да се користе алгоритми за обуку Њутновог типа већ ће морати да се користе методи статистичке оптимизације као што је симулирано очвршћавање или неки генетски алгоритам.

С друге стране, имајући у виду да и коефицијенти у полиному могу бити предмет оптимизације може се очекивати већа "снага" неурона који користи полином (9) као активациону функцију. Најзад, чињеница да полиномска активациона функција може да добија вредности које су веће од јединице и када је ред полинома ограничен на вредности мање од јединице, у неким примерима, може да поједностави целу ВНМ с обзиром да се може показати да излазни слој са линеарним неуронима није потребан.

IV. SPICE реализација полинома са разломљеним степеном и примери примене

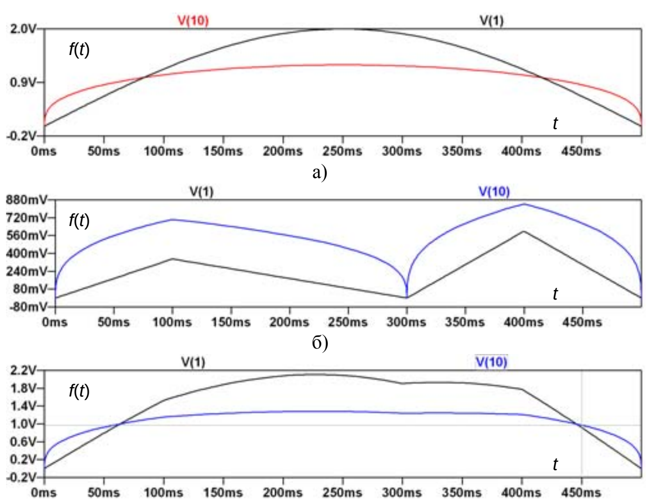
На Сл. 7 приказана је електрична шема која у SPICE нотацији реализује функцију (11). Улазни сигнали су овде приказани као идеални напонски генератори (обележени са s_i). Они контролишу полиномски напонски генератор контролисан напоном (NGKN) $v(\mathbf{s},\theta)$ који је дат са (2). Величине v_z и v_y су струје одговарајућих грана. Излазни сигнал је моделован као идеални нелинеарни напонски генератор контролисан струјом (NGKS). Када би се овај модел уграђивао у неуронску мрежу улогу улазних сигнала s_i преузели би одговарајући напони чворова у колу, а улогу потрошача (отпорник од 1 Ω који је везан паралелно излазу) преузео би наредни модел. Ова је шема развијена на основу [9]. Константа α се бира на погодан начин.



Слика 7. Ел. коло које у SPICE нотацији генерише функцију (11)

Треба уочити да се са малом модификацијом кола са Сл. 7 може лако реализовати и комплетан полином онако како је дато са (10). Наиме, довољно је да се нелинеарни полиномски контролисани генератор на излазу прошири одговарајућим сабирцима.

На Сл. 8 приказани су сигнали који су настали приликом симулације овог кола. Коришћена је варијанта која израчунава функцију $x^{1/3}$. На Сл. 8а приказана је функција једне променљиве при чему је као улазни сигнал V(1) узета синусоида. Излазни сигнал обележен је са V(10). На Сл. 8б приказана је функција једне променљиве при чему је као улазни сигнал узет тестерасти сигнал. Најзад, на Сл. 8в приказан је одзив неурона за случај када се као побуда користи збир прва два улазна сигнала. Ово би одговарало неурону код кога је w_1=1, w_2=1, и θ=0.



Слика 8. Таласни облици SPICE симулације

V. Закључак

Употреба програма SPICE је уобичајена у круговима електроничара. Зато смо сматрали да је веома корисно да развијемо модел вештачког неурона који ће у SPICE окружењу моћи да се симулира као електрично коло, а не као математичка функција. Као пример вештачког неурона овде по први пут предлажемо један који као активациону функцију користи полином са разломљеним степенима. Резултати симулација потврђују успех моделовања као и предвиђена својства неурона.

Захвалница

Овај рад је реализован у оквиру пројекта TP32004 који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Литература

[1] S. Haykin, *Neural Networks, A Comprehensive Foundation*, Macmillan College Publishing Company, New York, 1994.

[2] С. Миленковић, *Вештачке неуронске мреже*, Задужбина Андрејевић, Библиотека DISSERTATIO, књига бр. 46, 1997.

[3] H. B. Hammouda, et al. "*Neural-Based Models of Semiconductor Devices for SPICE Simulator*", American Journal of Applied Sciences, Vol. 5, No. 4, pp. 385-391, 2008.

[4] J. Sabatier, O. P. Agrawal, and J. A. Tenreiro Machado, "*Advances in Fractional Calculus*", Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, Dordrecht, The Netherlands., 2007.

[5] P. K. Banerji, and S. Choudhary, "*On the fractional calculus of a general class of polynomials*", Indian J. pure applied Mathematics, Vol. 27, No. 7, pp. 675-679, 1996.

[6] V. Litovski, *Osnovi elektronike, Teorija rešeni zadaci i ispitna pitanja*, Akademska Misao, Beograd, 2006.

[7] S. McCulloch, S., and W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in neurons activity," *Bull. Math. Biophys.*, vol. 5, pp. 115–133, 1943.

[8] M.J.L. Orr, "*Introduction to Radial Basis Function Networks*", Centre for Cognitive Science, University of Edinburgh, Scotland, April 1996.

[9] V. Litovski, Ž. Mrčarica, "*Macromodeling With Spice's Nonlinear Controlled Sources*", IEEE Circuits and Devices Magazine, Vol. 9, No. 6, November, pp. 14-17,51, 1993.

Abstract

A procedure of modeling a nonlinear controlled source representing a polynomial with fractional exponents is described. The model is accomodated to the SPICE notation. We propose a proper application of such a controlled source. Preliminary simulation results are reported.

Polynomials with fractional exponents, SPICE model and its application

Miona Andrejević Stošović, Marko Dimitrijević and Vančo Litovski